Mr MAAOUIA - 98 600 618 - 20 810 290 (2020 - 2021)

Bac MATH Série N° 15 Variable Aléatoire

Exercice N° 01 : Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 jusqu'au 9.

* On gagne 3 points pour chaque jeton pair tiré
* On perd 2 points pour chaque jeton impair tiré

On désigne par X : le gain algébrique réalisé par le joueur dans un tirage.

1) Un joueur extrait au hasard et simultanément deux jetons du sac.
   a) Déterminer toutes les valeurs possibles de la variable X ?
   b) Calculer les probabilités correspondantes à ces valeurs.
2) Un joueur tire successivement et sans remise trois jetons du sac.
   a) Définir la loi de probabilité de X
   b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice N° 02 : Un sac contient 10 jetons : six jetons marqués (-1), trois jetons (1) et un jeton (2).

1) On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac.
   Soit X : la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des points marqués sur les jetons tirés.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
3) On tire maintenant simultanément et au hasard trois jetons du sac et on désigne par Y l'aléa numérique qui, à chaque tirage, associe le produit des points marqués sur les trois jetons tirés.
   Définir la loi de probabilité de Y et déterminer $E(Y)$.

Exercice N° 03 : Une urne contient douze boules indiscernables au toucher :
4 boules rouges , 5 boules vertes et 3 boules blanches.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité des évènements suivants :
   A : « Obtenir deux boules blanches »
   B : « Obtenir deux boules de couleurs différentes »
2) On inscrit le chiffre (0) sur chaque boule rouge, (-2) sur la boule verte et (3) sur la boule blanche.
   Soit la variable aléatoire X qui à chaque tirage, fait correspondre la somme des nombres inscrits sur les deux boules tirées.
   Définir la loi de probabilité de X puis calculer son espérance, sa variance et son écart type.

Exercice N° 04 :

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces du premier dé sont numérotées de 1 à 6 et les faces de l'autre dé sont numérotées : 1 , 3 , 3 , 5 , 6 et 6.

On note a et b : les numéros des faces apparues respectivement du premier et du deuxième dé et S = a + b

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des dés associe : 0 si S est paire et S : si elle est impaire

1) Déterminer la loi de probabilité de X
2) On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to [0\,;1]$

$$x \mapsto F(x) = p(X < x)$$

Déterminer les valeurs prises la fonction F puis tracer sa courbe.

Exercice N° 05: On dispose d'une pièce de monnaie truquée de telle sorte qu'à chaque lancer, la probabilité d'avoir "Pile" soit le triple de "Face"

1) On lance la pièce une seule fois.
   Calculer la probabilité de chacune des deux faces de cette pièce
2) On lance la pièce truquée cinq fois de suite et d'une manière indépendante.
   on désigne par X : l'aléa numérique indiquant le nombre de fois où l'on a obtenu "Pile" après 5 lancers.
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et sa variance .

Exercice N° 06 : Un sac contient 7 jetons indiscernables au toucher dont 4 portent le numéro (0) , 2 jetons portent le numéro (1) et 1 jeton porte le numéro (2).

Un joueur tire simultanément et au hasard trois jetons du sac.
Il additionne les points marqués sur les jetons tirés :

- si cette somme n'est pas nulle, il gagne un nombre de point égal à cette somme.
- si cette somme est nulle , il procède à un nouveau tirage d'un seul jeton sans avoir remis les jetons déjà tirés, son gain est alors le point P marqué sur ce jeton.

1) Déterminer les probabilités des évènements :
   R : « le joueur est obligé de faire un nouveau tirage »
   A : « le gain est des points est 0 point »
   B : « le gain est de 1 point »
   C : « Le joueur est obligé de faire un nouveau tirage sachant que le gain est de 1 point »
2) Soit X : la variable aléatoire qui associe le gain du joueur
   Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$
3) On répète l'épreuve précédente 8 fois de suite et on désigne par Y la variable aléatoire qui associe le nombre de fois où l'évènement « B » est réalisé.
   a) Montrer que Y obéi à la loi binomiale dont on précisera les éléments caractéristiques.
   b) Définir la loi de probabilité de Y et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice N° 07 :

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant un seul jeton blanc et 9 jetons noirs et d'un dé cubique parfait.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie :
Le joueur doit tirer un jeton puis lancer le dé :
** Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le dé donne 6*
** Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le dé donne 6*
A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

A) On note les l'évènements : B « le jeton est Blanc » et G « le joueur gagne au jeu »

1) a) Représenter l'arbre pondéré de ce jeu.
   b) Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$
2) Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu
3) Un joueur fait n parties de façon indépendantes $(n \geq 2)$
   a) Calculer la probabilité p_n qu'il en gagne au moins une partie
   b) Quel est le nombre minimal de parties doit-il faire pour que la probabilité $p_n > 0.99$?

B) L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent.

* Chaque joueur paie 1 dinar par partie
* Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 dinars
* Si le joueur perd une partie, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur

1) Donner la loi de probabilité de X
2) Prouver que le jeu est défavorable à l'organisateur
3) L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs tout en gardant le seul jeton blanc. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu deviendra favorable à l'organisateur ?

Exercice N° 08 : Un magasin vend 3 types de calculatrices (Sharp, Casio, TI)

* 25% sont marque Sharp dont 20% programmables,
* 35% sont marque Casio dont 60% programmables
* 75% des calculatrices marque TI sont programmables.

La marque de l'appareil n'apparait pas sur l'emballage.

On choisit une calculatrice. On note : S : « la calculatrice est de marque Sharp »
C : « la calculatrice est de marque Casio »
T : « la calculatrice est de marque TI »
P : « la calculatrice est programmable »

1) a) Etablir l'arbre de probabilité modélisant la situation. Calculer la probabilité de : $P \cap S$, $P \cap C$ et $P \cap T$
   b) En déduire que $p(P) = 0.56$
2) Sachant que la calculatrice choisie est programmable, calculer la probabilité quelle soit de marque Sharp.
3) On considère un lot de 10 calculatrices. Soit X : le nombre de calculatrices programmables.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Déterminer l'espérance mathématique et $V(X)$
   c) Calculer la probabilité d'avoir au plus 9 calculatrices programmables.

Exercice N° 09 : Une fabrique de jouets vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation

Chaque jouet produit est soumis à deux contrôles : un contrôle de finition et un contrôle de solidité.

A la suite d'un grand nombre de test, il s'avère que : 92% des jouets sont sans défauts de finition dont 95% réussissent aussi le contrôle de solidité et 2% seulement ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note les évènements suivants :

F : « le jouet est sans défaut de finition » et S : « le jouet a réussit le test de solidité »

1) a) Déterminer p(F) , p(S|F) puis p(S∩F)
   b) Montrer que $p\left(\overline{S} \mid \overline{F}\right) = 0.25$
   c) Construire l'arbre pondéré de la situation. Déterminer p(S)
   d) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.
2) Les jouets ayant satisfait aux 2 contrôles rapportent un bénéfice de 10 dinars, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis à l'écart ; les autres rapportent un bénéfice de 5 dinars.

   On désigne par X : la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Calculer l'espérance mathématique de X
3) On choisit au hasard 20 jouets et on désigne par Y le nombre de jouets mis à l'écart.

   Définir la loi de probabilité de Y et calculer $E(Y)$

Exercice N° 10 :

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société fait contrôler les chaudières pendant l'été . Des études statistiques menées donnent les résultats suivants :

- **20% des** chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie , la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 1%
- Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie , la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 10%

On appelle G l'événement suivant « la chaudière est sous garantie »

1/ Construire un arbre pondéré de probabilité décrivant la situation

2)Calculer la probabilité des événements suivants

A« la chaudière est sous garantie et défectueuse »

D« la chaudière défectueuse »

3) On sait que la chaudière défectueuse , qu'elle est la probabilité qu'elle soit sous garantie.

4) la contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie , il coute 20 dinars si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse, il coûte 200 dinars si la chaudière n'est plus sous garantie et défectueuse.

On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière .

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique

Exercice N° 11 :

Une urne contient neuf jetons numérotée de 1 à 9. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.

1) On considère les évènements suivants:

   A:"Obtenir trois jetons de même parité".

   B:"Au mois un des trois jetons tirés porte un numéro pair ".

   a- Calculer la probabilité de l'évènement *A*.

   b- Montrer que la probabilité de l'évènement *B* est égale à $\frac{37}{42}$.

2) On désigne par *X* l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre de jetons tirés portant un numéro pair.

   a- Déterminer la loi de probabilité de *X*.

   b- Calculer l'espérance mathématique de *X*.

3) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant les trois jetons dans l'urne après chaque tirage. Calculer la probabilité de l'évènement suivant *C*:" *B* est réalisé au moins une fois ".

Exercice N° 12 :

Une boite cubique contient treize billes , 10 rouges et 3 vertes .
Une deuxième boite cylindrique contient sept billes , 3 rouges et 4 vertes . Un enfant joue avec ses billes

A) *Dans un premier jeu , il tire au hasard et simultanément trois billes de la boîte cubique .*
On appelle X la variable aléatoire correspondant ***au nombre de billes rouge(s) obtenue(s)*** *.*

1) *Déterminer la loi de probabilité de X .*
2) *Calculer l'espérance mathématique de X .*

B) *Un second jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes , puis qu'il prenne une bille de cette boite choisie . On considère les évènements suivants :*

C_1 : *« L' enfant choisit la boite cubique »* ; **R** : *« L' enfant prend une bille rouge »* .

1) a) *Modéliser ce jeu par un arbre pondérée .*
b) *Déduire que* $P(R) = \frac{109}{182}$.

2) *Sachant que l'enfant a tiré une boule rouge ,quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boite cubique ?*

C) *L'enfant reproduit n fois de suite son second jeu , ($n \in IN^*$) en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place .*

Soit L'évènement D_n : *« l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n tirages ».*

1) *Montrer que* $P(D_n) = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$.
2) *Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle* $P(D_n) \geq 0{,}99$.

Exercice N° 13 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte. Ecrire le numéro de la question et donner, sans justification, la lettre correspondante à la réponse choisie.

Un commercial vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité ci-dessous :

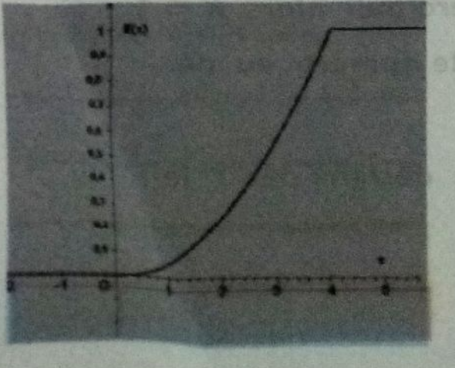
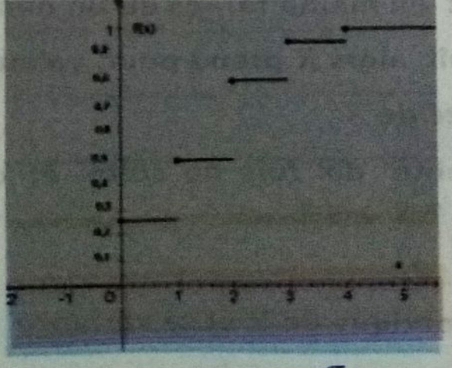
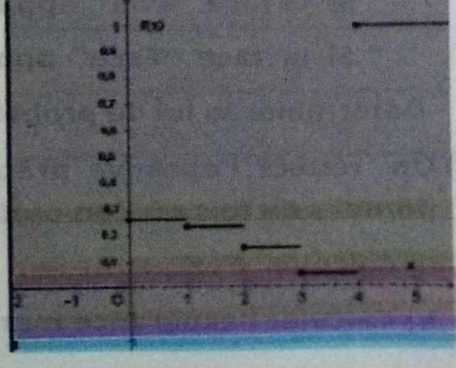
Nombre de voitures vendues	0	1	2	3	4
P(X=k)		0 .23	0,31	0.15	0,05

1) P(X = 0) est égale à :
a) 0.148 b) 0.74 c) 0.26

2) La probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine est égale à :
a) 0.49 b) 0.51 c) 0.31

3) L'espérance du nombre de voitures vendues en une année (c'est à dire 52 semaines) est égale à :
a) 1,5 b) 78 c) 52

4) une représentation graphique de la fonction de répartition f de cette loi est:

a)

b)

c)


Exercice N° 14 :

On considère une urne U_1 contenant 2 boules blanches et 4 boules rouges et une urne U_2 contenant 3 boules blanches et 2 boules rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

I) On tire une boule de U_1 et une boule de U_2.

1)a) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Obtenir deux boules de même couleur » ; B : « Parmi les deux boules tirées, une au moins est blanche ».

b) Sachant qu'on a obtenu deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour que la boule rouge soit tirée de U_1.

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

b) On répète l'épreuve précédente 5 fois de suite en remettant à chaque fois la boule dans l'urne où elle est tirée. Quelle est la probabilité des événements suivants :

F : « Obtenir exactement trois fois deux boules de même couleur ».

G : « Obtenir deux boules de même couleur pour la première fois au quatrième tirage »

H : « Avoir au plus une fois deux boules de même couleur »

II) On considère l'épreuve suivante : On tire une boule de U_1, si elle est blanche on la garde et on tire une autre boule de U_1, si elle est rouge on la met dans U_2 et on tire successivement sans remise deux boules de U_2. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches obtenues au cours de cette épreuve. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice N° 15 :

1) a) On lance un dé truqué dont les faces numérotées de 1 à 6.

Sachant que la probabilité d'apparition du n° 6 est $\frac{1}{3}$ et que les autres numéros ont la même probabilité d'apparition, calculer la probabilité d'apparition pour les numéros de 1 à 5.

b) On lance aussi une pièce de monnaie truquée.

Sachant que la probabilité d'apparition de "Pile" est $\frac{2}{5}$
Calculer la probabilité de l'autre face.

2) On lance simultanément le dé et la pièce de monnaie et on désigne par X l'aléa numérique définie comme suit:

* **Si la face "Pile" apparaît en même temps qu'un numéro impair alors $X = 0$**
* **Si la face "Pile" apparaît en même temps qu'un numéro pair alors $X = 1$**
* **Si la face "Face" apparaît alors X prend pour valeur le numéro du dé.**

Déterminer la loi de probabilité de X

3) On répète l'épreuve précédente dix fois de suite et on désigne par Y le nombre de fois où l'on obtient " $X \geq 5$ "

a) Calculer $P(Y = 7)$

b) Calculer l'espérance mathématique de Y et sa variance

Bac Math | Correction Série N° 15

Variable Aléatoire — 2020 - 2021

Exercice N° 01 :

9 jetons numérotés de $1 \to 9$

$\Leftrightarrow$ 9 jetons : $\boxed{\begin{array}{l} 5j \text{ Impairs} \\ 4j \text{ Paires} \end{array}}$

1) on extrait simult 2 j du sac.

- Si Pair $\Rightarrow$ +3 points
- Si Impair $\Rightarrow$ −2 points

X : le gain algébrique réalisé

a) $X(\Omega) = \{-4, +1, +6\}$

b) • pour $x = -4$: on associe l'évènement : "obtenir 2 j impairs"

$\Rightarrow p(\{x=-4\}) = \dfrac{C_5^2}{C_9^2} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

• Pour $x = 1$, on associe l'évènement "obtenir 1 j Pair et 1 j impair"

$\Rightarrow p(\{x=1\}) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_5^1}{C_9^2} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{10}{18}$

• Pour $x = 6$: on associe l'évènement "obtenir 2 j pairs"

$\Rightarrow P(\{x=6\}) = \dfrac{C_4^2}{C_9^2} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{3}{18}$

vérif : $\sum p(x=x_i) = \dfrac{5}{18} + \dfrac{10}{18} + \dfrac{3}{18} = 1$

2) on tire successivement et sans remise trois jetons du sac : $\boxed{\begin{array}{l} 5j \text{ Impair} \\ 4j \text{ Paire} \end{array}}$

~~a) X : le gain algébrique~~

$\Rightarrow X(\Omega) \in \{-6, -1, 4, 9\}$

• pour $x = -6 \longmapsto$ obten 3 j imp

$\Rightarrow p(x=-6) = \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{5}{42}$

• pour $x = -1 \longmapsto$ obtenir 2 j Imp et 1 j P

$\Rightarrow p(x=-1) = \dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{4}{7}\right) = \dfrac{20}{42}$

• pour $x = 4 \longmapsto$ obten 1 j Imp et 2 j P

$\Rightarrow p(x=4) = \dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7}\right) = \dfrac{15}{42}$

• pour $x = 9 \longmapsto$ obten 3 j P

$\Rightarrow p(x=9) = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{42}$

d'où la loi de probabilité de x est :

$x = x_i$	−6	−1	4	9	Σ
$p(x=x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{2}{42}$	1
$x_i \cdot p(x_i)$	$\frac{-30}{42}$	$\frac{-20}{42}$	$\frac{60}{42}$	$\frac{18}{42}$	$\frac{28}{42}$

b) $E(x) = \sum x_i\, p(x=x_i) = \dfrac{28}{42} = \dfrac{2}{3}$

Consiq : $E(x) = \dfrac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ le jeu est favorable

Exercice N° 02 :

Sac $\left\{\begin{array}{l} 6j\ (-1) \\ 3j\ (1) \\ 1j\ (2) \end{array}\right. \xrightarrow{\text{simult}} 2j$

X : la somme des Nbrs marqués sur les 2 jetons tirés.

1) $X(\Omega) = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$

• pour $x = -2 \longmapsto$ obten 2j (−1)

$\Rightarrow p(x=-2) = \dfrac{C_6^2}{C_{10}^2} = \dfrac{15}{45}$

• pour $x = 0 \longmapsto$ obtenir 1j (−1) et 1j (1)

$\Rightarrow P(x=0) = \dfrac{C_6^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \dfrac{18}{45}$

• pour $x = 1 \longmapsto$ obtenir 1j (−1) et 1j (2)

$\Rightarrow p(x=1) = \dfrac{C_6^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \dfrac{6}{45}$

• pour $x = 2 \longmapsto$ obten 2j (1)

$\Rightarrow p(x=2) = \dfrac{C_3^2}{C_{10}^2} = \dfrac{3}{45}$

• pour $X=3 \longmapsto$ obtenir $1j(1)$ et $1j(2)$

$\Rightarrow P(X=3) = \dfrac{C_3^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \dfrac{3}{45}$

d'où la loi de probabilité de X est:

$X=x_i$	-2	0	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{15}{45}$	$\frac{18}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{3}{45}$	1
$x_i\, p(x_i)$	$\frac{-30}{45}$	0	$\frac{6}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{9}{45}$	$-\frac{1}{5}$
$(x_i)^2 p(x_i)$	$\frac{60}{45}$	0	$\frac{6}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{27}{45}$	$\frac{7}{3}$

2) $E(X) = \sum x_i\, p(x_i) = -\frac{1}{5} < 0$

$\Rightarrow$ le jeu est défavorable

• $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{25} = \frac{172}{75}$

3) on tire simult 3j

Y : le produit des nombres inscrits sur les 3 jetons tirés.

$Y(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$

• pour $Y=-2 \longmapsto$ obten $1j(-1)\ 1j(1)$ et $1j(2)$

$\Rightarrow P(Y=-2) = \dfrac{C_6^1 C_3^1 C_1^1}{C_{10}^3} = \dfrac{18}{120} = \dfrac{9}{60}$

• pour $Y=-1 \longmapsto$ obten $3j(-1)$ ou $2j(1)$ et $1j(-1)$

$\Rightarrow P(Y=-1) = \dfrac{C_6^3 + C_3^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \dfrac{38}{120} = \dfrac{19}{60}$

• pour $Y=1 \longmapsto$ obten $3j(1)$ ou $2j(-1)$ et $1j(1)$

$\Rightarrow P(Y=1) = \dfrac{C_3^3 + C_3^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \dfrac{46}{120} = \dfrac{23}{60}$

• pour $Y=2 \longmapsto$ obten $2j(1)$ et $1j(2)$ ou $2j(-1)$ et $1j(2)$

$\Rightarrow P(Y=2) = \dfrac{C_1^1 \times C_3^2 + C_1^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \dfrac{18}{120} = \dfrac{9}{60}$

d'où la loi de proba de Y est:

$Y=y_i$	-2	-1	1	2	Σ
$P(Y=y_i)$	$\frac{9}{60}$	$\frac{19}{60}$	$\frac{23}{60}$	$\frac{9}{60}$	1
$y_i\, P(y_i)$	$-\frac{18}{60}$	$-\frac{19}{60}$	$\frac{23}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{-4}{60}$

$\Rightarrow E(Y) = \sum y_i\, P(Y=y_i) = -\frac{4}{60} = \frac{-1}{15} < 0$

Mr MAAOUIA

Exercice N° 03 :

$\begin{array}{|l|} 4R \to 0 \\ 5V \to (-2) \\ 3B \to (+3) \end{array} \xrightarrow{\text{simult}}$ 2 boules

1) A : obtenir 2 boules B

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{C_3^2}{C_{12}^2} = \dfrac{3}{66} = \dfrac{1}{22}$

B : obtenir 2 boules de couleurs $\neq$

$\Leftrightarrow$ B : obtenir $1R1\bar{R}$ ou $1V1B$

$\Rightarrow P(B) = \dfrac{C_4^1 . C_8^1 + C_5^1 \times C_3^1}{C_{12}^2} = \dfrac{47}{66}$

2) X : la somme des nombres inscrits sur les 2 boules tirées

$X(\Omega) = \{-4; -2, 0, 1, 3, 6\}$

• pour $X=-4 \longrightarrow$ obten 2V

$\Rightarrow P(X=-4) = \dfrac{C_5^2}{C_{12}^2} = \dfrac{10}{66}$

• pour $X=-2 \longmapsto$ obtenir 1R et 1V

$\Rightarrow P(X=-2) = \dfrac{C_4^1 . C_5^1}{C_{12}^2} = \dfrac{20}{66}$

• pour $X=0 \longmapsto$ obten 2R

$\Rightarrow P(X=0) = \dfrac{C_4^2}{C_{12}^2} = \dfrac{6}{66}$

• pour $X=1 \longmapsto$ obten 1V et 1B

$\Rightarrow P(X=1) = \dfrac{C_5^1 \times C_3^1}{C_{12}^2} = \dfrac{15}{66}$

• pour $X=3 \longmapsto$ obten 1R et 1B

$\Rightarrow P(X=3) = \dfrac{C_3^1 \times C_4^1}{C_{12}^2} = \dfrac{12}{66}$

• pour $X=6 \longmapsto$ obtenir 3 B

$\Rightarrow P(X=6) = \dfrac{C_3^2}{C_{12}^2} = \dfrac{3}{66}$

d'où la loi de proba de X est

$x=x_i$	-4	-2	0	1	3	6	Σ
$p(x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{3}{66}$	1
$x_i\, p(x_i)$	$\frac{-40}{66}$	$\frac{-40}{66}$	0	$\frac{15}{66}$	$\frac{36}{66}$	$\frac{18}{66}$	$-\frac{11}{66}$
$x_i^2 . p(x_i)$	$\frac{160}{66}$	$\frac{80}{66}$	0	$\frac{15}{66}$	$\frac{108}{66}$	$\frac{108}{66}$	$\frac{471}{66}$

$\cdot E(X) = \sum x_i \, p(X=x_i) = \frac{-11}{66} = \frac{-1}{6}$

$\cdot V(X) = \sum (x_i)^2 p(X=x_i) - \left[\sum x_i p(x_i)\right]^2$

$= E(X^2) - E(X)^2$

$= \frac{471}{66} - \left(\frac{-1}{6}\right)^2 = \frac{2815}{396}$

$\cdot \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 2,67$

Exercice N° 04 :

2 dés équilibrés
- le 1er dé : de 1 → 6
- le 2e dé : 1-3-3-5,6,6

a : le numéro de la face apparue du 1er dé

b : le numéro de la face apparue du 2e dé

$X = \begin{cases} 0 & \text{si } S = a+b \text{ est paire} \\ S & \text{si } S : \text{impaire} \end{cases}$

Le tableau de la somme :

1er dé (colonnes), 2e dé (lignes)

+	1	2	3	4	5	6
1	$\cancel{2}$ 0	3	$\cancel{4}$ 0	5	$\cancel{6}$ 0	7
3	$\cancel{4}$ 0	5	$\cancel{6}$ 0	7	$\cancel{8}$ 0	9
3	$\cancel{4}$ 0	5	$\cancel{6}$ 0	7	$\cancel{8}$ 0	9
5	$\cancel{6}$ 0	7	$\cancel{8}$ 0	9	$\cancel{10}$ 0	11
6	7	$\cancel{8}$ 0	9	$\cancel{10}$ 0	11	$\cancel{12}$ 0
6	7	$\cancel{8}$ 0	9	$\cancel{10}$ 0	11	$\cancel{12}$ 0

alors $X(\Omega) = \{0, 3, 5, 7, 9, 11\}$

comme les 2 dés sont équilibrés ⇒ chaque case de ce tableau a la même proba d'apparition

d'où la loi de proba de X :

$X=x_i$	0	3	5	7	9	11	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{18}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	1

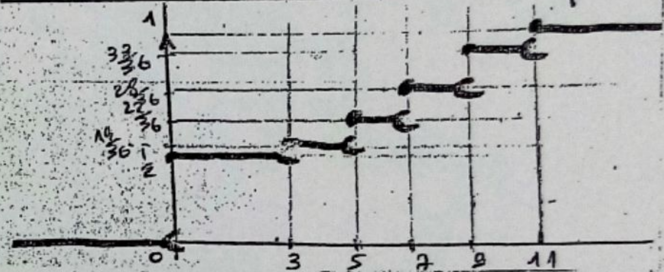
2) $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto F(x) = p(X < x)$

Les valeurs prises par F sont :

$x \in [a, b[$	$F(x) = p(X<b)$
$]-\infty, 0[$	0
$[0, 3[$	$\frac{1}{2}$
$[3, 5[$	$\frac{19}{36}$
$[5, 7[$	$\frac{22}{36}$
$[7, 9[$	$\frac{28}{36}$
$[9, 11[$	$\frac{33}{36}$
$[11, +\infty[$	1

d'où la courbe de la fonction de répartition



Exercice N° 05 :

Pièce truquée / $P(\text{Pile}) = 3\,p(\text{Face})$

1) on lance la pièce 1 fois

on désigne par Ω : l'univers d'1 lancer

$\Rightarrow \Omega = (\text{Pile})$ ou (Face)

$\Rightarrow p(\Omega) = P(\text{Pile}) + P(\text{Face})$

$\Rightarrow 1 = 3p(\text{Face}) + p(\text{Face}) = 4p(\text{Face})$

$\Rightarrow \boxed{p(\text{Face}) = \frac{1}{4}}$ et $\boxed{p(\text{Pile}) = \frac{3}{4}}$

2) on lance la pièce 5 fois de suite

X : le nombre de fois où l'on obtient "Pile" après 5 lancers

• on a :

1) L'épreuve est répétée 5 fois d'une manière indépendante

2) Chaque épreuve donne deux issues
- succès : avoir Pile
- échec : avoir Face

3) la même pièce étant utilisée lors de la répétition $\Rightarrow$ p(Pile) reste constante.

4) X : le nombre de succès

alors X : obéit à la loi binomiale de paramètres : $n = 5$ et $p = p(\text{Pile}) = \frac{3}{4}$

d'où $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\forall x \in X(\Omega)$, $p(X=k) = C_5^k p^k (1-p)^{5-k}$

$\Leftrightarrow \boxed{p(X=k) = C_5^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{5-k}}$

La loi de proba de X.

- Espérance : $E(X) = n \cdot p$
  $\Rightarrow E(X) = 5\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{4}$
- Variance : $V(X) = n \cdot p(1-p)$
  $\Rightarrow V(X) = 5\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{16}$
- Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Exercice N° 06 :

7 jetons → 4 j n° 0 ; 2 j n° 1 ; 1 j n° 2

- on tire simultanément 3 j du BAC ; on additionne les points marqués sur les 3 jetons tirés

si $S \neq 0 \Rightarrow$ le gain est S

si $S = 0 \longrightarrow$ on tire 1 autre jeton sans remettre les 3 jetons et le gain = P le point marqué sur le jeton tiré

1) R : le joueur est obligé de faire un nouveau tirage.

$\Rightarrow$ R : obtenir simult 3 j n° 0

alors $p(R) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$

A : le gain est de 0 point

$\Rightarrow$ A : réaliser R et tirer 1 j n° 0 au 2e tirage du BAC [1 j 0, 2 j 1, 1 j 2]

$\Rightarrow p(A) = p(R) \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{35} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{35}$

B : le gain est de 1 point

$\Rightarrow$ B : réaliser R puis tirer 1 j n° 1 au 2e tirage ou obtenir 2 j n° 0 et 1 j n° 1 au 1er tirage

$\Rightarrow p(B) = p(R) \cdot \frac{2}{4} + \frac{C_4^2 \times C_2^1}{C_7^3}$

$= \frac{\cancel{4}}{35} \times \frac{2}{\cancel{4}} + \frac{12}{35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$

C : le joueur est obligé de faire un nouveau tirage sachant que le gain est de 1 point

$\Rightarrow C = R | B$

alors $p(C) = p(R|B) = \frac{p(R \cap B)}{p(B)}$

or $R \cap B$: faire un nouveau tirage et gagner 1 point

$\Rightarrow p(R \cap B) = p(R) \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{35} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{35}$

$\Rightarrow p(C) = \frac{\frac{2}{\cancel{35}}}{\frac{14}{\cancel{35}}} \Rightarrow \boxed{p(C) = \frac{1}{7}}$

2) X : le gain du joueur

a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- pour $X = 0 \longmapsto$ le gain est 0 point : A

$\Leftrightarrow p(X=0) = p(A) = \frac{1}{35}$

- pour $X = 1 \longmapsto$ le gain est 1 point : B

$\Rightarrow p(X=1) = p(B) = \frac{14}{35}$

- pour $X = 2 \longmapsto$ le gain est 2 points

$\Leftrightarrow$ réaliser R puis tirer 1 j n° 2 ou obtenir 2 j n° 1 et 1 j n° 0 ou obtenir 2 j n° 0 et 1 j n° 2

$\Rightarrow p(X=2) = p(R) \cdot \frac{1}{4} + \frac{C_2^2 \cdot C_4^1}{C_7^3} + \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_7^3}$

$= \frac{4}{35} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{35} + \frac{6}{35} = \frac{11}{35}$

Mr MAAOUIA

. pour $x = 3 \Rightarrow$ obtenir (1j 0), (1j 1) et (1j 2)

$\Rightarrow p(x=3) = \frac{C_4^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_7^3} = \frac{8}{35}$

. pour $x = 4$: obtenir 2j (1) et 1j (2)

$\Rightarrow p(x=4) = \frac{C_2^2 \cdot C_1^1}{C_7^3} = \frac{1}{35}$

d'où la loi de probabilité de X est :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	Σ
$p(x=x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{35}$	1
$x_i \cdot p(x_i)$	0	$\frac{14}{35}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{64}{35}$
$(x_i)^2 \cdot p(x_i)$	0	$\frac{14}{35}$	$\frac{44}{35}$	$\frac{72}{35}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{146}{35}$

d'où $E(X) = \sum x_i \, p(x = x_i) = \frac{64}{35}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{146}{35} - \left(\frac{64}{35}\right)^2$

$V(X) = \frac{1014}{1225}$

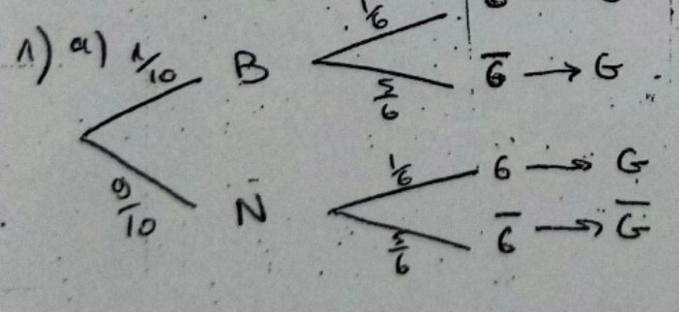
Exercice N° 07 :

Le sac $\begin{cases} 1 \text{ jeton Blanc} \\ 9 \text{ jetons Noirs} \end{cases}$

Le jeu : | . on lance le dé et tire 1 j.
. si B et 6 $\Rightarrow$ il perd
. si N et 6 $\Rightarrow$ il gagne.

(A) B : "le jeton est Blanc"
G : "le joueur gagne le jeu"

1) a)



b) $G = (B \cap \bar{6}) \cup (N \cap 6)$

$\Rightarrow p(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$

Cul : $\boxed{P(G) = \frac{7}{30}}$

2) $p(B|G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)}$

$= \frac{P(B) \cdot P(\bar{6}|G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{5}{6}}{\frac{7}{30}} = \frac{5}{14}$

3) a) n : parties indépendantes

$\bar{P}_n = [p(\bar{G})]^n = [1 - p(G)]^n = \left(\frac{23}{30}\right)^n$

$\Longrightarrow P_n = 1 - \bar{P}_n = 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n$

b) $P_n > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n > 0{,}99$

$\Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n < 10^{-2}$

or log ↗ $\Rightarrow n \log\left(\frac{23}{30}\right) < -2$

$\Leftrightarrow n > \frac{-2}{\log\left(\frac{23}{30}\right)} \simeq 17{,}33$

or $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \boxed{n = 18}$

(B) le joueur paie 1 dinars
. s'il gagne, il reçoit 5^d
. s'il perd, il ne reçoit rien

X : le gain algébrique du joueur

1) $X(\Omega) = \{-1, 4\}$

pour $x = -1$ = le joueur perd la partie

$\Rightarrow p(x = -1) = \frac{23}{30}$

pour $x = 4$: le joueur gagne la partie

$\Rightarrow p(x = 4) = \frac{7}{30}$

alors la loi de proba de X est

$x = x_i$	-1	4	Σ
$p(x = x_i)$	$\frac{23}{30}$	$\frac{7}{30}$	1
$x_i \, p(x_i)$	$\frac{-23}{30}$	$\frac{28}{30}$	$\frac{5}{30}$

2) $E(X) = \sum x_i \, p(x = x_i) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

$E(X) > 0 \Rightarrow$ le jeu est favorable pour le joueur

$\Longrightarrow$ le jeu défavorable pour l'organisateur

Mr MAAOUIA

3) le sac $\begin{cases} n \text{ jetons Noirs} \\ 1 \text{ jeton Blanc} \end{cases}$

$\Rightarrow p(G) = p(B)\cdot p(G|B) + p(N)\cdot p(G|N)$

$\Leftrightarrow p(G) = \left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{5}{6} + \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{n+5}{6(n+1)}$

d'où $p(X=-1) = p(\overline{G}) = 1 - \frac{n+5}{6(n+1)}$

$= \frac{5n+1}{6(n+1)}$

et $p(X=4) = p(G) = \frac{n+5}{6(n+1)}$

$\Rightarrow E(X) = \sum x_i\, p(X=x_i)$

$= (-1)\left(\frac{5n+1}{6(n+1)}\right) + 4\left(\frac{n+5}{6(n+1)}\right)$

$\Leftrightarrow E(X) = \frac{-n+19}{6(n+1)}$

Le jeu est favorable à l'organisateur

$\Leftrightarrow E(X) < 0 \Leftrightarrow -n+19 < 0$

$\Leftrightarrow \boxed{n > 19}$

Exercice N° 08

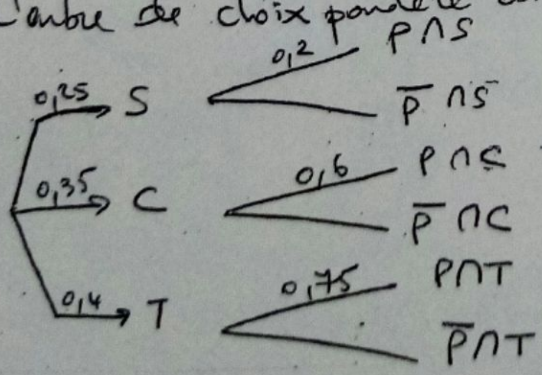
S: "Calculatrice marque Sharp"

C: "Calculatrice marque Casio"

T: "Calculatrice marque TI"

P: "La calculatrice programmable"

L'arbre de choix pondéré est:



1) a) • $p(P\cap S) = p(S)\cdot p(P|S) = 0{,}25\times 0{,}2$

$\Rightarrow p(P\cap S) = 0{,}05$

• $p(P\cap C) = p(C)\cdot p(P|C) = 0{,}35\times 0{,}6$

$\Rightarrow p(P\cap C) = 0{,}21$

• $p(P\cap T) = p(T)\cdot p(P|T) = 0{,}4\times 0{,}75$

$\Rightarrow p(P\cap T) = 0{,}3$

b) $P = (P\cap S)\cup(P\cap C)\cup(P\cap T)$

- Comme les évents $(P\cap S)$, $(P\cap C)$ et $(P\cap T)$ sont incompatibles $\Rightarrow$

$p(P) = p(P\cap S) + p(P\cap C) + p(P\cap T)$

$\Rightarrow \boxed{p(P) = 0{,}56}$

2) $p(S|P) = \frac{p(S\cap P)}{p(P)} = \frac{0{,}05}{0{,}56}$

$\boxed{p(S|P) \simeq 0{,}09}$

3) Lot de 10 calculatrices

X: le nombre de calculatrices programmables.

a) on a $\begin{cases} 1) \text{ Répétition indépendante} \\ 2) \text{ 2 issues} < \begin{matrix} P \\ \overline{P} \end{matrix} \\ 3) \text{ } p(P) \text{ reste constante} \end{cases}$

$\Rightarrow$ X: obéit à la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}56$

donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

$p(X=k) = C_{10}^{k}(0{,}56)^{k}(0{,}44)^{10-k}$

b) $E(X) = np = 5{,}6$

$V(X) = np(1-p) = 10(0{,}56)(0{,}44)$

$\Rightarrow \boxed{V(X) = 2{,}464}$

c) $p(X\leq 9) = 1 - p(X=10)$

$= 1 - (0{,}56)^{10}$

alors $\boxed{p(X\leq 9) \simeq 0{,}997}$

Mr MAAOUIA

Exercice N° 09:

F : le jouet est sans défaut de finition

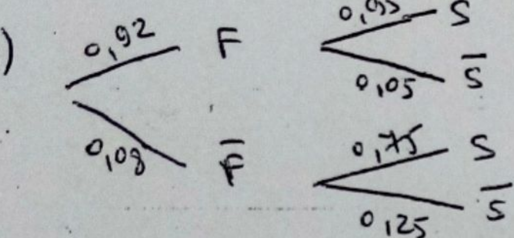
S : le jouet a réussi le test de solidité

1) a) $p(F) = 0{,}92 \quad p(S|F) = 0{,}95$

$p(S \cap F) = p(F) \cdot p(S|F) = 0{,}874$

b) $p(\overline{S}|\overline{F}) = \frac{p(\overline{S} \cap \overline{F})}{p(\overline{F})} = \frac{0{,}02}{0{,}08} = \frac{1}{4}$

c)



d) $S = (F \cap S) \cup (\overline{F} \cap S)$

$\Rightarrow p(S) = p(F) \cdot p(S|F) + p(\overline{F}) \cdot p(S|\overline{F})$

$= (0{,}92)(0{,}95) + (0{,}08)(0{,}75)$

$\Rightarrow \boxed{p(S) = 0{,}934}$

e) $p(F|S) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0{,}874}{0{,}934} = 0{,}936$

2) X : le bénéfice rapporté

$\Rightarrow X(\Omega) = \{0, 5, 10\}$

$p(X=0) = p(\overline{S}) = 0{,}066$

$p(X=5) = p(\overline{F} \cap S) = p(\overline{F}) \cdot p(S|\overline{F}) = 0{,}06$

$p(X=10) = p(S \quad) = 0{,}874$

d'où la loi de proba de X est

$X = x_i$	0	5	10	Σ
$p(X=x_i)$	0,066	0,06	0,874	1
$x_i\, p(X=x_i)$	0	0,3	8,74	9,04

$E(X) = \sum x_i\, p(X=x_i) = 9{,}04$

3) on choisit 20 jouets

Y : le nombre de jouet mis au rebut

on a : 1) répétition indépendante
2) chaque jouet < Succès : X=0 / Echec : X≠0
3) p(succès) : constante

$\Rightarrow$ Y : obéi à la loi binomiale de paramètres $\left| \begin{array}{l} n = 20 \\ p = p(X=0) = 0{,}066 \end{array} \right.$

$\Rightarrow Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$

$\forall k \in X(\Omega)$, $p(X=k) = C_{20}^{k}(0{,}066)^{k}(0{,}934)^{20-k}$

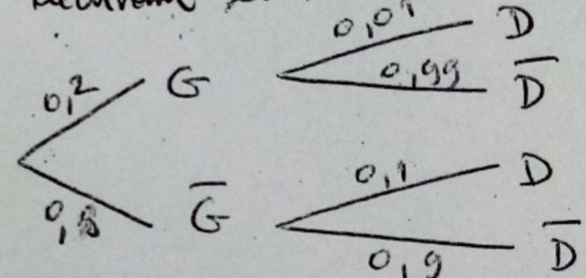
$E(Y) = np = 20(0{,}066) = 1{,}32$

Exercice N° 10 :

G : "La chaudière sous garantie"

D : "la chaudière est defectueuse"

1) L'arbre pondéré de probabilité décrivant la situation :



2) . $A = G \cap D$

$\Rightarrow p(A) = p(G) \cdot p(D|A)$

$= (0{,}2)(0{,}01) = 0{,}002$

. $D = (G \cap D) \cup (\overline{G} \cap D)$

$\Rightarrow p(D) = p(G \cap D) + p(\overline{G} \cap D)$

car $(G \cap D)$ et $(\overline{G} \cap D)$: incompatibles

d'où $p(D) = p(G) \cdot p(D|G) + p(\overline{G})\, p(D|\overline{G})$

$\Rightarrow p(D) = (0{,}2)(0{,}01) + (0{,}8)(0{,}1) = 0{,}082$

Concl : $\boxed{p(D) = 0{,}082}$

3) $p(G|D) = \frac{p(G \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}002}{0{,}082} = \frac{1}{41}$

4) X : le coût du contrôle

$X(\Omega) = \{0, 20, 200\}$

Mr MAAOUIA

• Pour $x=0$; la chaudière est sans Garantie

$\Rightarrow p(X=0)=p(G)=0,2$

• Pour $x=20$: $\overline{G}\cap\overline{D}$

$\Rightarrow p(x=20)=p(\overline{G}\cap\overline{D})=p(\overline{G})\cdot p(\overline{D}|\overline{G})$
$=(0,8)(0,9)=0,72$

• pour $x=200$: $\overline{G}\cap D$

$\Rightarrow p(x=200)=p(\overline{G})\cdot p(D|\overline{G})$
$=(0,8)(0,1)=0,08$

d'où la loi de proba de x est :

$x=x_i$	0	20	200	Σ
$p(x=x_i)$	0,2	0,72	0,08	1
$x_i p(x=x_i)$	0	14,4	16	30,4

$E(x)=\sum x_i\, p(x=x_i)=30,4$

Exercice N° 11 :

9 jetons numérotés de 1 à 9
→ (5 jetons impairs + 4 j pairs)
on tire simultanément 3 jetons

1) A : obten 3 j Pairs ou 3 j Imp

$\Rightarrow p(A)=\dfrac{C_4^3+C_5^3}{C_9^3}=\dfrac{14}{84}=\dfrac{1}{6}$

b) B : obtenir au moins 1 j Pair
$\Rightarrow \overline{B}$: obtenir 3 j Impairs

d'où $p(\overline{B})=\dfrac{C_5^3}{C_9^3}=\dfrac{10}{84}=\dfrac{5}{42}$

alors $p(B)=1-p(\overline{B})\Rightarrow \boxed{p(B)=\dfrac{37}{42}}$

2) X : le Nbre de jetons Pairs tirés

a) $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

• pour $x=0$: obten 3 j Imp $\Leftrightarrow \overline{B}$

d'où $p(x=0)=p(\overline{B})=\dfrac{5}{42}$

• Pour $x=1$: obten 1 j P et 2 j Imp

$\Rightarrow p(x=1)=\dfrac{C_4^1 C_5^2}{C_9^3}=\dfrac{40}{84}=\dfrac{20}{42}$

• Pour $x=2$: obten 2 j P et 1 j Imp

$\Rightarrow p(x=2)=\dfrac{C_4^2 C_5^1}{C_9^3}=\dfrac{30}{84}=\dfrac{15}{42}$

• Pour $x=3$: obten 3 j P

$\Rightarrow p(x=3)=\dfrac{C_4^3}{C_9^3}=\dfrac{4}{84}=\dfrac{2}{42}$

d'où la loi de proba de X est

$x=x_i$	0	1	2	3	Σ
$p(x=x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{2}{42}$	1
$x_i p(x_i)$	0	$\frac{20}{42}$	$\frac{30}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{56}{42}$

b) $E(x)=\sum x_i\, p(x=x_i)=\dfrac{56}{42}=\dfrac{4}{3}$

3) on répète l'épreuve 5 fois

C : B est réalisé au moins 1 fois
$\overline{C}$: obten $\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}$

$\Rightarrow p(\overline{C})=[p(\overline{B})]^5=\left(\dfrac{5}{42}\right)^5$

d'où $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\left(\dfrac{5}{42}\right)^5$

Exercice N° 12 :

Boite cubique : 13 billes $\begin{cases}10R\\3V\end{cases}$

Boite cylindrique : 7 billes $\begin{cases}3R\\4V\end{cases}$

(A) il tire simultanément 3 billes de la boite cubique.

X : Nbre de billes rouges obtenus

1) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

• Pour $\underline{X=0}$: obten 3V

$\Rightarrow p(X=0) = \frac{C_3^3}{C_{13}^3} = \frac{1}{286}$

• Pour $\underline{X=1}$: obten 2V 1R

$\Rightarrow p(X=1) = \frac{C_3^2 C_{10}^1}{C_{13}^3} = \frac{30}{286}$

• Pour $\underline{X=2}$: obten 1V 2R

$\Rightarrow p(X=2) = \frac{C_3^1 C_{10}^2}{C_{13}^3} = \frac{135}{286}$

• Pour $\underline{X=3}$: obten 3R

$\Rightarrow p(X=3) = \frac{C_{10}^3}{C_{13}^3} = \frac{120}{286}$

d'où la loi de proba de X :

$X=x_i$	0	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{120}{286}$	1
$x_i P(X=x_i)$	0	$\frac{30}{286}$	$\frac{270}{286}$	$\frac{360}{286}$	$\frac{660}{286}$

2) $E(X) = \sum x_i\, p(X=x_i) = \frac{660}{286}$

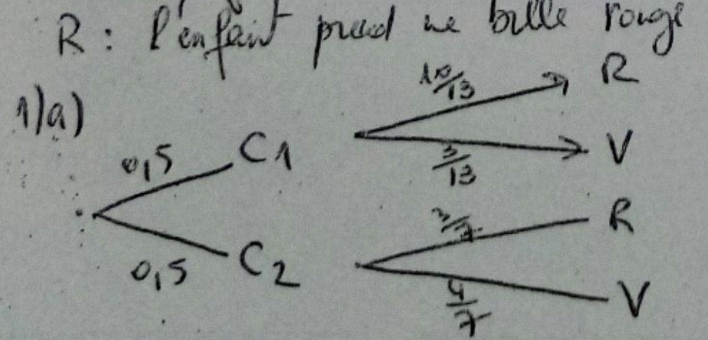
$\Leftrightarrow \boxed{E(X) = \frac{30}{13}}$

(B) il choisit une boite au hasard puis, il y tire 1 bille.

C_1 : l'enfant choisit la boite cubique

R : l'enfant prend une bille rouge

1)a)



b) $R = (C_1 \cap R) \cup (C_2 \cap R)$

$\rightarrow p(R) = p(C_1) \cdot p(R|C_1) + p(C_2) \cdot p(R|C_2)$

car $(C_1 \cap R)$ et $(C_2 \cap R)$: incompatibles

alors $p(R) = (0,5)\left(\frac{10}{13}\right) + (0,5) \cdot \frac{3}{7}$

$\Rightarrow p(R) = \frac{5}{13} + \frac{3}{14} = \frac{109}{182}$

2) $p(C_1|R) = \frac{P(R \cap C_1)}{P(R)} = \frac{P(C_1) \cdot p(R|C_1)}{P(R)}$

$\Leftrightarrow p(C_1|R) = \frac{(0,5) \cdot \frac{10}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{5}{13} \times \frac{182}{109}$

$\Leftrightarrow \boxed{p(C_1|R) = \frac{70}{109}}$

(C) D_n : l'enfant a tiré au moins 1 fois lors des n tirages

1) $\overline{D_n}$: l'enfant n'a tiré aucune bille rouge lors des n tirages

$\Rightarrow \overline{D_n}$: obtenir $\overline{R}\,\overline{R} \ldots \overline{R}$

d'où $p(\overline{D_n}) = [p(\overline{R})]^n = \left(\frac{73}{182}\right)^n$

d'où $p(D_n) = 1 - p(\overline{D_n})$

$\Rightarrow \boxed{p(D_n) = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n}$

2) $p(D_n) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geq 0,99$

$\Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \leq 0,01 = 10^{-2}$

$\ln \nearrow \Rightarrow n \ln\left(\frac{73}{182}\right) \leq -2 \ln(10)$

$\Rightarrow n \geq \frac{-2\ln(10)}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)} \simeq 5,041$

or $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \boxed{n_0 = 6}$

$\underline{\text{Cl}}$: si $n \geq 6 \Rightarrow p(D_n) \geq 0,99$

Mr MAAOUIA

Exercice N° 13 :

1) $P(X=0) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4)$

$\Rightarrow P(X=0) = 1 - 0{,}74 = 0{,}26$ $\boxed{c}$

2) $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$\Leftrightarrow P(X \geq 2) = 0{,}51 \Longrightarrow \boxed{b}$

3) L'espérance du nombre vendue en une année est

$E = 52 \sum x_i p(x_i) = 52 \times (1{,}5) = 78$

$\Rightarrow \boxed{b}$

4) La représentation graphique de la fonction de répartition est : $\boxed{b}$

Exercice N° 14 :

2B 4R	3B 2R
U_1	U_2

(I) on tire une boule U_1 et 1 boule de U_2

1) a) A : obtenir 2 boules de même couleurs

$\Leftrightarrow$ A : obtenir RR ou RR

$\Rightarrow P(A) = \left(\frac{2}{6} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

B : Obtenir au moins 1 boule B

$\overline{B}$: obtenir RR

$P(\overline{B}) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

d'où $p(B) = 1 - p(\overline{B}) \Leftrightarrow \boxed{p(B) = \frac{11}{15}}$

b) on considère les événements :

S : tirer R de U_1 sachant qu'on a tiré 2 boules de couleurs différents

E : obtenir 2 couleurs différentes

F : obtenir R de U_1

$\Rightarrow S = F|E \Rightarrow p(S) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}$

or E : obtenir BR ou RB

$\Rightarrow p(E) = \left(\frac{2}{6} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{4}{6} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{15}$

$F \cap E$: obtenir RB

$\Rightarrow p(F \cap E) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

alors $p(S) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{2}{5} \times \frac{15}{8} = \frac{3}{4}$

2) X : le Nbre de boules B obtenues

a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

• pour $X=0$: obtenir RR

$\Rightarrow p(X=0) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

• pour $X=1$: obtenir BR ou RB

$\Rightarrow p(X=1) = p(E) = \frac{8}{15}$

• pour $X=2$: obtenir BB

$\Rightarrow p(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{15}$

d'où la loi de proba de X

$X = x_i$	0	1	2	Σ
$p(X=x_i)$	$4/15$	$8/15$	$3/15$	1
$x_i p(x_i)$	0	$8/15$	$6/15$	$14/15$
$(x_i)^2 p(x_i)$	0	$8/15$	$12/15$	$20/15$

$E(X) = \sum x_i p(X = x_i) = \frac{14}{15}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =$

$= \frac{4}{3} - \left(\frac{14}{15}\right)^2 = \frac{104}{225}$

$\boxed{E(X) = \frac{14}{15}}$ et $\boxed{V(X) = \frac{104}{225}}$

Mr MAAOUIA

b) on répète l'épreuve 5 fois
on pose Y: "le Nbre de fois où l'on obtient 2 boules de même couleur"
$\Leftrightarrow Z$: "le Nbre de fois où "A" est réalisé"
alors Z : obéit à la loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=p(A)=\frac{7}{15}$
alors $Z(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$
et $p(Z=k)=C_5^k\left(\frac{7}{15}\right)^k\left(\frac{8}{15}\right)^{5-k}$

. F : obtenir 3 succès
$\Rightarrow p(F)=p(Z=3)=C_5^3\left(\frac{7}{15}\right)^3\left(\frac{8}{15}\right)^2$

. G : obtenir $\bar{A}\bar{A}\bar{A}A\forall$
$=p(G)=[p(\bar{A})]^3p(A).1=\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(\frac{7}{15}\right)$

. H : avoir au plus 1 fois A
$\Rightarrow H:(Z=0)$ ou $(Z=1)$
$\Rightarrow p(H)=p(Z=0)+p(Z=1)$
$=C_5^0\left(\frac{8}{15}\right)^5+C_5^1\left(\frac{7}{15}\right)\left(\frac{8}{15}\right)^4$
$=\left(\frac{8}{15}\right)^4\left[\frac{8}{15}+\frac{35}{15}\right]=\frac{43}{15}\left(\frac{8}{15}\right)^4$

II) on tire 1 boule de U_1
. Si B on la garde et on tire 1 autre boule de U_1
. Si R, on la met dans U_2 et on tire successivement sans remise 2 boules de U_2

Y : le Nbre de boules B obtenues
$Y(\Omega)=\{0,1,2\}$

pour $Y=0$: obtenir R de U_1 et RR de U_2
$\Rightarrow p(Y=0)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

. pour $Y=1$: obtenir B de U_1 et R de U_1 ou R de U_1 et (BR) de U_2
$\Rightarrow p(Y=1)=\left(\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{6}\right)\left[\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\right]2=\frac{10}{15}$

. pour $Y=2$: obtenir BB de U_1 ou R de U_1 et BB de U_2
$\Rightarrow p(Y=2)=\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{15}$

d'où la loi de proba de Y est :

$Y=y_i$	0	1	2	Σ
$p(Y=y_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{3}{15}$	1
$y_i\,p(y_i)$	0	$\frac{10}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{16}{15}$

$E(Y)=\sum y_i\,p(Y=y_i)=\frac{16}{15}$

Exercice N° 15 :

1)a) on lance un dé truqué / $p(6)=\frac{1}{3}$
et $p(1)=p(2)=\dots=p(5)=x$
or $\sum_{i=1}^{6}p(i)=1\Rightarrow 5x+\frac{1}{3}=1$
$\Leftrightarrow 5x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2}{15}$
Conclusion : $p(1)=p(2)=\dots=p(5)=\frac{2}{15}$

b) Pièce truquée / $p(Pile)=\frac{2}{5}$
mais $p(Pile)+p(F)=1\Leftrightarrow$
$p(F)=1-p(Pile)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

2) on lance simult la pièce et le dé
. si "Pile" et "Impair" $\Rightarrow X=0$
. si "Pile" et "Pair" $\Rightarrow X=1$
. si "Face" $\Rightarrow X=N\in\{1,2,3,4,5,6\}$
$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5,6\}$
. pour $X=0\longmapsto$ obtenir "Pile" et "1, 3 ou 5"
$\Rightarrow p(X=0)=\frac{2}{5}\left[\frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{2}{15}\right]=\frac{4}{25}$

Mr MAAOUIA

• pour $x=1$ < obtenir "Pile" et "2, 4 ou 6" ou obtenir "Face" et "1"

$\Rightarrow p(x=1) = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{8}{25}$

• pour $x = 2, 3, 4$ ou 5 : obtenir "F" et "2, 3, 4 ou 5"

$\Rightarrow p(x=2) = p(x=3) = p(x=4) = p(x=5) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{15} = \frac{2}{25}$

• pour $x = 6$. $\mapsto$ obtenir "F" et "6"

$\Rightarrow p(x=6) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{25}$

d'où la loi de proba de X :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	Σ
$p(x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	1

3) on répète l'épreuve 10 fois de suite

Y : le Nbre de fois où $(X \geq 5)$.

a) Y : obéit à la loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p = p(X \geq 5) = \frac{7}{25}$.

$p(Y=7) = C_{10}^{7}\left(\frac{7}{25}\right)^7\left(\frac{18}{25}\right)^3$

b) $E(Y) = np = 10\left(\frac{7}{25}\right) = \frac{14}{5}$

$V(Y) = np(1-p) = 10\left(\frac{7}{25}\right)\left(\frac{18}{25}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{V(Y) = \frac{252}{125}}$